فصلنامه اختصاصی تبلیغات و بازاریابی
پارس مدیر
شماره ۱۲، پاییز ۱۳۹۷

کاربرد تئوری خاکستری در مدیریت بازاریابی

آرش حبیبی* (الف)

الف: مدیر مسئول فصلنامه بازاریابی پارس‌مدیر - arash.habibi@parsmodir.com

چکیده

بازاریابی و مدیریت بازار همواره با میزانی از عدم اطمینان همراه است. رویکرد صفر و یکی به مدیریت بازاریابی مخاطرات زیادی را همراه دارد. نوع نگاه مدیران بازاریابی به رقبا، مشتریان و پویایی‌های محیط، خاکستری است و در تصمیمات بازاریابی باید حالت‌های خوش‌بینانه و بدبینانه در نظر گرفته شود. از اینرو تئوری خاکستری برای تحلیل‌های کمی بازاریابی بسیار مناسب است. تکنیک‌های متعددی با رویکرد خاکستری توسعه یافته است که می‌توان برای محاسبات کمی بازاریابی مورد استفاده قرار گیرد. با این وجود یکی از مشکلات دانشجویان و پژوهشگران نحوه استفاده از تکنیک‌های خاکستری است. در این مقاله تئوری خاکستری، سیستم خاکستری و اعداد خاکستری مفهوم‌سازی خواهد شد. سپس تکنیک‌های تصمیم‌گیری خاکستری تشریح خواهد شد و کاربرد آنها در مدیریت بازاریابی تبیین می‌شود. در پایان پژوهشگران و مدیران بازاریابی قادر خواهند بود با استفاده از تکنیک‌های مناسب خاکستری تصمیم‌گیری مناسب‌تری برای فعالیت‌های علمی و عملی خود داشته باشند.

واژگان کلیدی: *تئوری خاکستری، سیستم خاکستری، محاسبات خاکستری، مدیریت، بازاریابی*

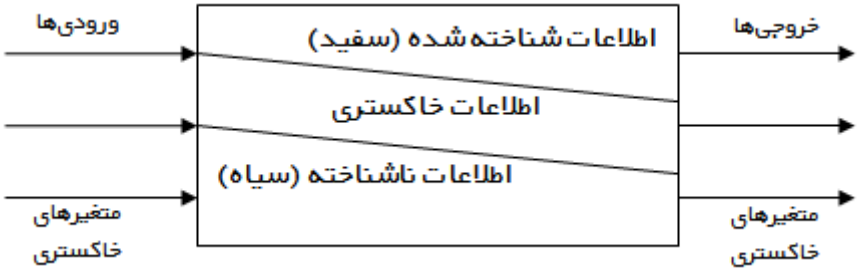
۱- مقدمه

تئوری خاکستری که به سال ۱۹۸۲ توسط دنگ (Deng) مطرح گردید، یکی از مفاهیم ریاضی است که کاربرد گسترده‌ای در تصمیم‌گیری چندمعیاره پیدا کرده است. این تئوری روشی موثر برای مواجهه با مشکلات عدم اطمینان همراه با تصمیم‌گیری براساس اطلاعات ناشناخته و ناکامل است. بطور معمول برای ارزیابی معیارها از قضاوت کیفی خبرگان استفاده می‌شود. در عمل نیز قضاوت تصمیم گیرندگان اغلب نامطمئن بوده و به وسیله مقادیر عددی دقیق قابل بیان نیستند. تئوری خاکستری یکی از روش‌هایی است که برای مطالعه عدم اطمینان و ناکامل بودن اطلاعات به کار می‌رود.

عمده‌ترین روش‌های مورد استفاده با رویکرد خاکستری که در مدیریت و بازاریابی قابل استفاده هستند عبارتند از: تکنیک دلفی خاکستری، مقایسه زوجی خاکستری، دیمتل خاکستری، تحلیل رابطه خاکستری و تاپسیس خاکستری. در این مطالعه هر یک از این روش‌ها تشریح و کاربرد آنها در مدیریت با تمرکز بر مدیریت بازاریابی بیان می‌شود. همچنین با یک مثال کاربردی هر یک از این روش‌ها مفهوم‌سازی می‌گردد.

۲- تئوری خاکستری

اگر اطلاعات واضح یک سیستم با رنگ سفید و اطلاعات ناشناخته با رنگ سیاه تجسم شود، در این صورت اطلاعات مربوط به بیشتر سیستم‌های موجود در طبیعت اطلاعات سفید (کاملاً شناخته شده) و یا سیاه (کاملا ناشناخته) نیستند بلکه مخلوطی از آن دو یعنی به رنگ خاکستری هستند. این گونه سیستم‌ها را سیستم‌های خاکستری می‌نامند که اصلی ترین مشخصه آن ها، کامل نبودن اطلاعات مربوط به آن سیستم است.



شکل ۱- سیستم خاکستری

برای ورود به مباحث تحلیل خاکستری باید اعداد خاکستری معرفی شود. ابتدا به سیستم طبیعی اعداد دقت کنید. به هر عدد معمولی مانند 0,1,2,3,... یک عدد قطعی (Crisp) گفته می‌شود. برای مثال سن شما یک عدد قطعی است. مثلا یک فرد ۳۰ سال سن دارد. اما برخی موارد مقداری قطعی ندارد. برای مثال یک فرد جوان چند سال سن دارد؟ برای نمونه شما می‌توانید بگویید یک فرد جوان بین ۲۰ تا ۳۰ سال سن دارد. این یک نمونه از بیان خاکستری یک عدد است.

عدد خاکستری به عددی اطلاق می‌شود که مقدار دقیق آن نامشخص است اما بازه‌ای که مقدار آن را در بر می‌گیرد شناخته شده است. یک عدد خاکستری می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$G \in [L, U]$

در سیستم اعداد خاکستری مانند اعداد فازی مقدار دقیق عددمشخص نیست اما بازه عدد خاکستری معلوم است. به عبارت دیگر مقدار دقیق کران بالا و پایین یک عدد خاکستری، معین و معلوم است. در حالی که در یک عدد فازی ضمن این که عدد به صورت یک بازه تعریف می‌شود، اما مقدار دقیق کران بالا و پایین معلوم نیست و از یک تابع عضویت تبعیت می‌کند. همین تفاوت بین عدد خاکستری و عدد فازی موجب می‌شود که محاسبات با اعداد خاکستری از سادگی بیشتری نسبت به اعداد خاکستری برخوردار باشد.

اگر دو عدد خاکستری زیر مفروض باشد:

$$G_1 = [L_1, U_1]\ ;\ G_2 = [L_2, U_{21}]$$

عملیات جبری خاکستری به صورت زیر انجام خواهد شد:

جمع خاکستری	$G_1 + G_2 = [L_1 + L_2, U_1 + U_2]$
تفریق خاکستری	$G_1 - G_2 = [L_1 - U_2, U_1 - L_2]$
منفی کردن عدد خاکستری	$-G_1 = [-L_1, -U_1]$
معکوس عدد خاکستری	$G_1{}^{-1} = \left[\frac{1}{U_1}, \frac{1}{L_1}\right]$
ضرب خاکستری	$G_1 \times G_2 = (L_1 \times L_2, U_1 \times U_2)$
تقسیم خاکستری	$\frac{G_1}{G_2} = \left[\min\left\{\frac{L_1}{L_2}, \frac{L_1}{U_2}\right\}, \max\left\{\frac{U_1}{L_2}, \frac{U_1}{U_2}\right\}\right]$
ضرب عدد قطعی در خاکستری	$K \times G_1 = [kL_1, kU_1]; \mathrm{K} \in \mathrm{R}^+$
میانگین خاکستری	$AVE(G_i) = \left[\frac{\sum L_i}{n}, \frac{\sum U_i}{n}\right]$
میانگین هندسی خاکستری	$\prod G_i = \left[\prod L_i, \prod U_i\right]$

میانگین خاکستری به صورت رابطه زیر نیز نمایش داده می‌شود:

$$G_{ij} = \frac{1}{K}\left[G_{ij}^1 + G_{ij}^2 + \cdots + G_{ij}^k\right]$$

میانگین هندسی خاکستری به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\prod G_i = \left[\prod L_i, \prod U_i\right]$$

میانگین هندسی با نماد پی لاتین Π نمایش داده می‌شود. برای محاسبه میانگین هندسی یک مجموعه اعداد خاکستری کافی است تا میانگین هندسی مقادیر کران پایین و کران بالا به صورت جداگانه محاسبه شود.

طول (بازه پشتیبان) یک عدد خاکستری مانند G به صورت زیر است:

$$L(G) = [U - L]$$

(شی، ۲۰۰۵).

۳- تکنیک دلفی خاکستری

اگر چه قرن‌ها از زمانی که پوتیا در معبد دلفی به پیشگویی می‌پرداخت، گذشته است اما این معبد هنوز پابرجاست. موسسه نظامی رند در ایالات متحده در اواخر دهه ۱۹۵۰ برای تصمیم گیری مبتنی بر گردآوری محرمانه دیدگاه خبرگان تکنیکی را مطرح کرد که آن را دلفی نام‌گذاری کرد. این تکنیک یک دهه بعد توسط هلمر و دالکی به صورت عمومی مطرح شد و از آن زمان تاکنون در مطالعات متعددی مورد استفاده قرار گرفته است (حبیبی و همکاران، ۲۰۱۴). اساس محاسبات تکنیک دلفی بر دیدگاه خبرگان استوار است. بنابراین هرگونه خطا و ناسازگاری در سنجش دیدگاه خبرگان، نتیجه نهایی به دست آمده از محاسبات را تحت تاثیر قرار می‌دهد. کمی کردن دیدگاه خبرگان به روش سنتی، امکان انعکاس کامل سبک تفکر انسانی را ندارد لذا استفاده از مجموعه‌های فازی، سازگاری بیشتری با توضیحات زبانی و بعضاً مبهم انسانی دارد (حبیبی و همکاران، ۲۰۱۵). بنابراین استفاده از تحلیل دلفی خاکستری نیز می‌تواند جایگزین بهتری نسبت به دلفی سنتی باشد. از سوی دیگر سادگی محاسبات دلفی خاکستری نسبت به دلفی فازی، کارایی محاسباتی این روش را افزایش می‌دهد.

هدف تکنیک دلفی غربالگری مجموعه‌ای از معیارها براساس دیدگاه خبرگان است. بنابراین برای شروع مجموعه‌ای از معیارهای مورد نظر را در قالب یک جدول تهیه کنید. از خبرگان امر بخواهید تا براساس عبارات کلامی «بی‌اهمیت» تا «کاملا مهم» هر یک از معیارها را ارزیابی کنند. سپس با استفاده از جدول ۱ دیدگاه خبرگان را به صورت اعداد خاکستری کمی کنید.

جدول ۱- طیف خاکستری دلفی خاکستری

عبارات کلامی	بی اهمیت	کم‌اهمیت	تقریبا بااهمیت	متوسط	باهمیت	خیلی بااهمیت	کاملا مهم
	VL	L	ML	M	MH	H	VH
معادل خاکستری	[0.0-0.1]	[0.1-0.3]	[0.3-0.4]	[0.4-0.5]	[0.5-0.6]	[0.6-0.9]	[0.9-1.0]

پس از کمی کردن دیدگاه خبرگان، میانگین خاکستری دیدگاه خبرگان را محاسبه کنید. روش محاسبه **میانگین خاکستری** در بحث عملیات جبری اعداد خاکستری آمده است.

در نهایت باید مقادیر میانگین اهمیت هر معیار که به صورت خاکستری محاسبه شده است به عدد قطعی تبدیل شود. عملیات تبدیل یک عدد خاکستری به یک عدد قطعی را «سفید سازی» گویند. سفیدسازی بسیار ساده است و با یک میانگین ساده به صورت زیر انجام می‌شود:

$$if\ \mathrm{G} = [\mathrm{L}\,,\mathrm{U}] \rightarrow Crisp = \frac{L+U}{2}$$

مقادیر سفیده شده بین ۰ تا یک خواهند بود. اگر ملاک شما آن است که معیارهایی با اهمیت بالا را انتخاب کنید هر عنصری که امتیاز بالای ۰/۵ بدست آورده است را انتخاب کنید. اگر می‌خواهید فقط معیارهایی که خیلی بااهمیت باشند را انتخاب کنید، ملاک تصمیم‌گیری را ۰/۶ قرار دهید. برای این نکته به دنبال منبع نوشته یک موطلایی که چشمان آبی داشته باشد، نباشید. تنها به جدول ۱ دقت کنید و منطق خود را بکار بگیرید.

۴- تکنیک دیمتل خاکستری

تکنیک دیمتل جهت شناسایی روابط بین معیارها ارائه شده است (فونتلا و گابوس، ۱۹۷۶). برای شناسائی الگوی روابط میان n معیار ابتدا یک ماتریس $X_{n\times n}$ تشکیل می‌شود. تاثیر عنصر مندرج در هر سطر بر عناصر مندرج در ستون در این ماتریس درج می‌شود. از یک طیف مانند جدول ۲ استفاده می‌شود. درایه‌های قطر اصلی یعنی تاثیر هر عنصر بر خودش نیز صفر در نظر گرفته می‌شود.

جدول ۲- طیف مورد استفاده در تکنیک دیمتل خاکستری

عبارات کلامی	بدون تاثیر	تاثیر خیلی کم	تاثیر کم	تاثیر زیاد	تاثیر خیلی زیاد
معادل خاکستری	[0,0]	[0,0.3]	[0.3,0.5]	[0.5,0.7]	[0.7,1]

ماتریس اولیه برای هر خبره به صورت زیر است:

$$X = \begin{bmatrix} [0,0] & G_{12}^{k} \ldots & G_{1n}^{k} \\ G_{21}^{k} & [0,0] \ldots & G_{2n}^{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n1}^{k} & G_{n2}^{k} & [0,0] \end{bmatrix}$$

در ماتریس فوق G_{ij}^{k} میزان تاثیر عنصر i بر عنصر j را از دیدگاه خبره kام نشان می‌دهد. برای محاسبه ماتریس ارتباط مستقیم نهایی، باید میانگین دیدگاه خبرگان در هر درایه از ماتریس محاسبه شود. میانگین خاکستری دیدگاه خبرگان را محاسبه کنید. با محاسبه میانگین خاکستری دیدگاه خبرگان، ماتریس ارتباط مستقیم یا X محاسبه شده است.

$$X = \begin{bmatrix} [0,0] & x_{12} \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & [0,0] \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & [0,0] \end{bmatrix}$$

برای نرمال کردن ماتریس ارتباط مستقیم، جمع خاکستری مقادیر هر سطر حساب می‌شود. بزرگترین مقدار کران پایین و کران بالا انتخاب می‌شود. عدد خاکستری حاصل را با نمادی مثل K نمایش می‌دهند. تمامی مقادیر ماتریس ارتباط مستقیم X بر K تقسیم می‌شود:

$$K = \left[max \sum_{j}^{n} L_{ij}, max \sum_{j}^{n} U_{ij} \right]$$

$$N = \frac{X}{K}$$

$$N_{ij} = \left[\frac{L_{ij}}{L_k}, \frac{L_{ij}}{L_u} \right]$$

ماتریس نرمال شده را سفید کنید. برای محاسبه ماتریس ارتباط کامل ابتدا ماتریس همانی (I) تشکیل می‌شود. سپس ماتریس همانی را منهای ماتریس نرمال کرده و ماتریس حاصل را معکوس می‌کنیم.

$$T = N \times (I - N)^{-1}$$

مثال کاربردی: فرض کنید می‌خواهید روابط بین عناصر آمیخته بازاریابی را با دیمتل خاکستری بررسی کنید. عناصر آمیخته بازاریابی عبارتند از قیمت، محصول، توزیع و ترفیع که هر یک را با نماد P نمایش می‌دهیم. ماتریس ارتباط مستقیم از دیدگاه ده خبره در جدول ۳ ارائه شده است.

جدول ۳- ماتریس ارتباط مستقیم عناصر آمیخته بازاریابی

	P1	P2	P3	P4	Σ
P1	[0, 0]	[2.25, 3]	[2.75, 3.75]	[2.5, 3.5]	[7.5, 10.25]
P2	[2.5, 3.5]	[0, 0]	[3, 4]	[0.75, 1.75]	[6.25, 9.25]
P3	[0, 0.5]	[1, 1.75]	[0, 0]	[1.75, 2.5]	[2.75, 4.75]
P4	[0.25, 0.25]	[1.75, 2.5]	[1.75, 2.75]	[0, 0]	[3.75, 5.5]
					[7.5, 10.25]

میانگین مقادیر هر سطر حساب شده است. بزرگترین مقدار حاصل [7.5, 10.25] می‌باشد. تمامی درایه‌ها بر این مقدار تقسیم می شود. برای آشنایی با روش تقسیم خاکستری به بحث عملیات جبری خاکستری رجوع کنید. ماتریس ارتباط مستقیم نرمال شده به صورت زیر است:

جدول ۴- ماتریس ارتباط مستقیم نرمال شده

N	P1	P2	P3	P4
P1	[0, 0]	[0.22, 0.4]	[0.268, 0.5]	[0.244, 0.467]
P2	[0.244, 0.467]	[0, 0]	[0.293, 0.533]	[0.073, 0.233]
P3	[0, 0.067]	[0.098, 0.233]	[0, 0]	[0.171, 0.333]
P4	[0.024, 0.033]	[0.171, 0.333]	[0.171, 0.367]	[0, 0]

این ماتریس را سفید کنید و عملیات را مانند روش دیمتل معمولی تکمیل کنید. در مطالعات مختلف گفته شده است باید این ماتریس به دو ماتریس کران پایین و کران بالا تقسیم شده و سپس هر کدام جداگانه حل شوند. تردید نکنید این روند غلط است و نتایج صحیح بدست نمی‌دهد.

۵- تحلیل سلسله‌مراتبی خاکستری

هدف فرایند تحلیل سلسله مراتبی رتبه‌بندی عناصر براساس مقایسه زوجی است (ساعتی، ۱۹۸۳). برای انجام مقایسه زوجی معمولاً از طیف نه درجه ساعتی استفاده می‌شود. در تکنیک تحلیل سلسله‌مراتبی خاکستری GAHP می‌توانید از طیف مندرج در استفاده کنید.

جدول ۵- اعداد خاکستری مناسب برای مقایسه زوجی

عبارات کلامی	معادل خاکستری	معکوس
ترجیح یکسان	[1,1]	[1,1]
تقریباً مرجح	[1,3]	$\left[\frac{1}{3},1\right]$
خیلی مرجح	[3,5]	$\left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right]$
خیلی زیاد مرجح	[5,7]	$\left[\frac{1}{7},\frac{1}{5}\right]$
کاملا مرجح	[7,9]	$\left[\frac{1}{9},\frac{1}{7}\right]$

پس از گردآوری دیدگاه خبرگان می‌توانید **میانگین هندسی خاکستری** دیدگاه آنها را حساب کنید.
ماتریس مقایسه زوجی را تشکیل دهید.
میانگین هندسی خاکستری عناصر هر سطر را محاسبه کنید تا وزن اولیه هر عنصر بدست آید.
جمع خاکستری وزن اولیه هر عنصر را حساب کنید.
وزن اولیه را بر جمع اوزان تقسیم خاکستری کنید تا وزن نهایی هر عنصر محاسبه شود.
وزن نهایی هر عنصر را در وزن نهایی معیار مربوط به خود ضرب خاکستری کنید.
اعداد نهایی را سفید کنید. این اعداد نرمال نیست و می‌توانید به روش برداری نرمال کنید.

مثال کاربردی : فرض کنید می‌خواهید وزن معیارهای بازارمحوری را با مقایسه زوجی خاکستری مشخص کنید. براساس دیدگاه نارور و اسلاتر (۱۹۹۰) ابعاد بازارمحوری عبارتند از: هماهنگی، رقیب‌گرایی و مشتری‌گرایی. هر معیار را با حرف C نشان می‌دهیم. ماتریس مقایسه زوجی معیارهای بازارمحوری براساس دیدگاه ده خبره در جدول ۶ ارائه شده است.

جدول ۶ - ماتریس مقایسه زوجی معیارهای بازارمحوری

	C1	C2	C3	Π	W
C1	[1, 1]	[1.246, 1.676]	[1.54, 2.453]	[1.243, 1.602]	[0.347, 0.578]
C2	[0.597, 0.803]	[1, 1]	[1.513, 2.273]	[0.967, 1.222]	[0.27, 0.441]
C3	[0.408, 0.649]	[0.44, 0.661]	[1, 1]	[0.564, 0.754]	[0.158, 0.272]
				[2.774, 3.578]	[0.775, 1.291]

قطر اصلی ماتریس مقایسه زوجی یعنی اولویت هر عنصر نسبت به خودش همیشه [1, 1] است. براساس دیدگاه خبرگان، ترجیح عنصر C1 به C2 مقدار [1.246, 1.676] بدست آمده است بنابراین براساس قواعد مربوط به **تقسیم خاکستری** ترجیح C2 به C1 به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\frac{C2}{C1} = [1.246, 1.676] \rightarrow \frac{C2}{C1} = \left[\frac{1}{1.676}, \frac{1}{1.246}\right] = [0.597, 0.803]$$

به همین ترتیب مقایسه زوجی عناصر تکمیل می‌شود. سپس میانگین هندسی هر سطر محاسبه شده است که در زیر ستون میانگین هندسی که با حرف Π نمایش داده شده است درج شده است. در نهایت هر یک از عناصر این ستون بر جمع خاکستری کل عناصر ستون یعنی عدد [2.774, 3.578] تقسیم خاکستری می‌شود. برای مثال وزن خاکستری معیار اول به صورت زیر محاسبه شده است:

$$W_{C1} = \left[\frac{1.243}{3.578}, \frac{1.602}{2.774}\right] = [0.347, 0.578]$$

نتیجه به صورت بردار ویژه زیر ستون W خواهد بود. می‌توانید این مقادیر را سفید کنید یا اگر زیرمعیارهایی برای هر معیار اصلی وجود دارد محاسبات را ادامه دهید. وزن خاکستری زیرمعیارهای هر خوشه را حساب کنید و در وزن خاکستری معیارهای اصلی ضرب کنید. وزن خاکستری نهایی محاسبه خواهد شد.

۶- تحلیل رابطه خاکستری

تکنیک تحلیل رابطه خاکستری یا Grey Rational Anaysis, GRA نیز یک تکنیک تصمیم‌گیری چندمعیاره است که برای ارزیابی تعدادی گزینه براساس تعدادی معیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. این تکنیک هیچ ارتباطی با منطق خاکستری ندارد و روش حل آن با همان عدد قطعی است و همیشه با یک ماتریس تصمیم ساده مشابه تاپسیس، ویکور و ... شروع می‌شود. در این تکنیک نیز براساس تعدادی معیار به انتخاب گزینه برتر پرداخته می‌شود.

در این تکنیک از مفهوم «**رابطه خاکستری**» معادل **ماتریس تصمیم** در تکنیک ویکور و تاپسیس استفاده می‌شود. رابطه خاکستری (ماتریس تصمیم) به صورت زیر نیز قابل نمایش است:

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & y_{mn} \end{bmatrix}$$

از آنجا که واحدهای سنجش هر معیار ممکن است متفاوت باشد بنابراین داده‌های ماتریس تصمیم باید نرمال یا بی‌مقیاس شود. با استفاده از نرمال کردن، در اینجا هر Y_i به X_i تبدیل می‌شود. برای تبدیل هر y_{ij} به معادل x_{ij} از یکی از سه فرمول زیر استفاده می‌شود:

$$x_{ij} = \frac{y_{ij} - \min(y_{ij})}{\max(y_{ij}) - \min(y_{ij})}$$ هر چه بزرگتر بهتر

$$x_{ij} = \frac{\max(y_{ij}) - y_{ij}}{\max(y_{ij}) - \min(y_{ij})}$$ هر چه کوچکتر بهتر

$$x_{ij} = \frac{\left|y_{ij} - y^*\right|}{\max\left\{\max(y_{ij}) - y^*, y^* - \min(y_{ij})\right\}}$$ هر چه به ارزش مطلوب y* نزدیکتر بهتر

در تکنیک تحلیل رابطه خاکستری برخلاف تکنیک تاپسیس و ویکور که فقط بین معیارهای منفی و مثبت تمایز قایل می‌شود، بین مطلوب ترین مقدار هم تمایز قائل می‌شود. برای مثال فرض کنید یک ملاک استخدامی سن باشد. سوال: هر چه سن بیشتر باشد بهتر است یا کمتر؟ اگر سن یک عامل منفی باشد (هر چه کوچکتر بهتر) بنابراین یک نوزاد گزینه بسیار بهتری از یک فرد سی ساله برای استخدام است. برای این منظور درست آن است که بگوییم هر چه سن به یک عدد خاصی نزدیکتر باشد بهتر است. براین اساس در ماتریس تصمیم خاکستری سه دسته معیار وجود دارد:

- هرچه بزرگتر بهتر (همان معیارهای مثبت در تکنیک تاپسیس و ویکور)
- هرچه کوچکتر بهتر (همان معیارهای منفی در تکنیک تاپسیس و ویکور)
- هرچه به مقدار مطلوب نزدیکتر بهتر (در تکنیک ویکور و تاپسیس لحاظ نمی شود)

درنهایت ماتریس نرمال به صورت زیر خواهد بود:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{mn} \end{bmatrix}$$

پس از نرمال‌سازی روابط خاکستری با استفاده از معادلات بالا، تمامی مقادیر بین صفر و یک قرار خواهند گرفت. هر چه x_{ij} به یک نزدیکتر باشد از مطلوبیت بیشتری برخوردار خواهد بود. در نتیجه سری مقایسه‌ای که تمام گزینه‌های آن برابر ۱ باشد بهترین انتخاب خواهد بود. **سری هدف مرجع**[1] یک سری است که تمامی مقادیر آن برابر ۱ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_o = (x_{o1}, x_{o2}, ..., x_{oj}, ..., x_{on}) = (1,1,...,1,...,1)$$

هرچه مقادیر گزینه i به سری مرجع نزیک‌تر باشد، در اینصورت از مطلوبیت بیشتری برخوردار خواهد بود. با استفاده از **ضریب رابطه خاکستری**[2] نزدیکی هر x_{ij} به x_{oj} متناظر سنجش می‌شود. هرچه ضریب رابطه خاکستری بزرگتر باشد، نزدیکی بیشتر است. ضریب رابطه خاکستری به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma(x_{Oj}, x_{ij}) = \frac{\Delta Min + \zeta \Delta \mathrm{Max}}{\Delta_{ij} + \zeta \Delta \mathrm{Max}} \qquad i = 1,2, \dots m \quad j = 1,2, \dots, n$$

برای انجام محاسبات فوق باید Δ_{ij} محاسبه شود.

$$\Delta_{ij} = x_{Oj} - x_{ij}$$

بنابراین $\Delta \min$ کوچکترین مقدار Δ_{ij} و $\Delta \max$ بزرگترین مقدار Δ_{ij} خواهد بود. در این رابطه r ضریب تشخیص[3] است و جهت گسترش یا محدود ساختن دامنه ضریب رابطه خاکستری استفاده می‌شود. دقت کنید ضریب تشخیص که گاهی با ρ یا ζ نیز نمایش داده می‌شود مقداری بین [۰و۱] است و معمولاً ۰/۵ در نظر گرفته می‌شود. براساس مطالعه تحلیل حساسیت چانگ و لین (۱۹۹۹) مقدار ۰/۵ یک ضریب تشخیص متعادل بوده و از ثبات خوبی برخوردار است (لین و همکاران، ۲۰۰۷).

پس از محاسبه تمامی ضرائب رابطه خاکستری $\gamma(x_{ij}, x_{ij})$، **رتبه رابطه خاکستری**[4] با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\Gamma(x_o, x_i) = \sum_j^n w_j \gamma(x_{oj}, x_{ij})$$

این عبارت میزان همبستگی سری هدف مرجع و سری مقایسه‌ای را نشان می‌دهد.

در این محاسبات W همان وزن معیارها است که توسط تکنیک‌هائی مانند سوارا، انتروپی، بهترین-بدترین یا فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی محاسبه می‌شود. سری مرجع هدف برای هر شاخص، بهترین مقدار آن شاخص در ماتریس تصمیم است. سری مقایسه‌ای هر گزینه که بالاترین میزان رابطه خاکستری را با سری هدف مرجع داشته باشد، دارای بیشترین شباهت با سری مرجع هدف است و لذا این گزینه، بهترین انتخاب است.

مثال کاربردی : هدف اصلی از انجام این پژوهش انتخاب برند برتر با استفاده از تکنیک تحلیل رابطه‌ای خاکستری است. فرض کنید براساس ۶ معیار می‌خواهید ۵ برند را ارزیابی کنید. وزن معیارهای تصمیم‌گیری به صورت زیر است:

W = 0.279; 0.115; 0.129; 0.058; 0.075; 0.344

در ماتریس تصمیم مندرج درجدول ۷ به هر برند براساس هر معیار امتیازی داده شده است.

---

[1] Reference Sequence Definition
[2] Grey Relational Coefficient
[3] Distinguishing coefficient
[4] Grey Relational Grade

جدول ۷- ماتریس ارزیابی ۵ برند براساس ۶ معیار

	معیار ۱	معیار ۲	معیار	معیار ۴	معیار ۵	معیار ۶
برند یک	۸.۲۳	۲.۱۲	۱.۴۲	۳۵.۹۳	۳۲.۱۸	۰.۹۶
برند دو	۳.۲۹	۱.۱۱	۲.۰۳	۵۵.۳۸	۳۱.۵۲	۰.۹۴
برند سه	۴.۳۰	۱.۰۰	۲.۷۸	۳۰.۹۴	۲۴.۳۵	۰.۹۳
برند چهار	۶.۱۴	۰.۳۱	۱.۲۳	۱۲۳.۲۱	۱۵.۶۳	۰.۹۲
برند پنج	۶.۶۱	۲.۴۱	۲.۸۵	۲۳.۵۸	۳۶.۱۰	۰.۹۲

فرض بر این است معیار ۱ و ۲ هر چه به ۱ نزدیکتر باشد بهتر است. معیارهای ۳ و ۴ و ۵ هرچه بزرگتر باشد بهتر است و معیار ۶ هرچه نزدیک به ۰/۵ نزدیکتر باشد بهتر است. برای نرمال‌سازی از رابطه ۱ استفاده می‌شود. نتایج حاصل از بی‌مقیاس سازی ماتریس تصمیم در ارائه شده است.

جدول ۸- بی‌مقیاس‌سازی ماتریس ارزیابی برندهای موجود

	معیار ۱	معیار ۲	معیار	معیار ۴	معیار ۵	معیار ۶
برند یک	۸.۲۳	۲.۱۲	۱.۴۲	۳۵.۹۳	۳۲.۱۸	۰.۹۶
برند دو	۳.۲۹	۱.۱۱	۲.۰۳	۵۵.۳۸	۳۱.۵۲	۰.۹۴
برند سه	۴.۳۰	۱.۰۰	۲.۷۸	۳۰.۹۴	۲۴.۳۵	۰.۹۳
برند چهار	۶.۱۴	۰.۳۱	۱.۲۳	۱۲۳.۲۱	۱۵.۶۳	۰.۹۲
برند پنج	۶.۶۱	۲.۴۱	۲.۸۵	۲۳.۵۸	۳۶.۱۰	۰.۹۲

اختلاف هریک از عناصر مندرج در ماتریس تصمیم بی‌مقیاس شده با سری مرجع هدف محاسبه شده است. هر درایه ماتریس جدید را با Δ_{ij} نمایش می‌دهیم. براساس روابط موجود و اوزان نهائی شاخص‌های تصمیم‌گیری، امتیاز موزون هریک از برندها ارائه شده است.

جدول ۹- رتبه رابطه خاکستری برندهای موجود

	معیار ۱	معیار ۲	معیار	معیار ۴	معیار ۵	معیار ۶	جمع کل	رتبه
برند یک	۰.۲۷۹	۰.۰۷۶	۰.۰۴۰	۰.۰۱۸	۰.۰۵۱	۰.۳۴۴	۰.۸۰۸	۱
برند دو	۰.۰۸۰	۰.۰۳۵	۰.۰۵۷	۰.۰۲۱	۰.۰۴۸	۰.۱۵۳	۰.۳۹۴	۵
برند سه	۰.۰۹۳	۰.۰۳۳	۰.۱۱۶	۰.۰۱۸	۰.۰۳۱	۰.۱۲۰	۰.۴۱۰	۳
برند چهار	۰.۱۳۶	۰.۰۵۰	۰.۰۳۷	۰.۰۵۸	۰.۰۲۲	۰.۰۹۸	۰.۴۰۱	۴
برند پنج	۰.۱۵۳	۰.۱۱۵	۰.۱۲۹	۰.۰۱۷	۰.۰۷۵	۰.۰۹۸	۰.۵۸۷	۲

براساس نتایج مندرج در جدول امتیاز نهائی هر برند محاسبه شده است. مشخص است برند یک بهترین عملکرد را داشته است. برند پنج در رتبه بعدی قرار دارد. برند سه نیز در رتبه میانی است و برندهای دو و سه در انتهای جدول قرار دارند.

۷- تحلیل چندمعیاره خاکستری

تعمیم تصمیم‌گیری چندمعیاره با منطق خاکستری در برخی مقاله‌ها با عنوان تاپسیس خاکستری مطرح شده است. از تحلیل خاکستری برای انتخاب گزینه برتر براساس تعدادی معیار استفاده می‌شود. در این تحلیل m گزینه براساس n میعار ارزیابی می‌شوند. بنابراین ابتدا باید ماتریس ارزیابی خاکستری $G_{m\times n}$ تشکیل شود. ماتریس تصمیم خاکستری به صورت زیر است:

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{m1} & G_{m2} & G_{mn} \end{bmatrix}$$

در ماتریس خاکستری فوق هر G_{ij} میزان اهمیت گزینه iام براساس معیار jام است. اگر ارزیابی گزینه‌ها براساس معیارها از دیدگاه خبرگان انجام شود برای کمی کردن عبارات کلامی خبرگان می‌توان از طیف مندرج در جدول ۱۰ استفاده کرد.

جدول ۱۰- طیف خاکستری ارزیابی گزینه‌ها براساس معیارها

عبارات کلامی	خیلی ضعیف	ضعیف	نسبتاً ضعیف	متوسط	نسبتاً خوب	خوب	خیلی خوب
معادل خاکستری	[1-0]	[3-1]	[4-3]	[5-4]	[6-5]	[9-6]	[10-9]

اگر وزن معیارها نیز با روش‌های دیگری محاسبه نشده باشد از عبارات کلامی مندرج در جدول ۱۱ برای تعیین میزان اهمیت معیارها استفاده می‌شود (لی و همکاران، ۲۰۰۷).

جدول ۱۱- طیف خاکستری تخمین اهمیت معیارها

عبارات کلامی	خیلی کم	کم	تقریبا کم	متوسط	تقریبا زیاد	زیاد	خیلی زیاد
معادل خاکستری	[0.0-0.1]	[0.1-0.3]	[0.3-0.4]	[0.4-0.5]	[0.5-0.6]	[0.6-0.9]	[0.9-1.0]

در این تکنیک نیز اساس کار تشکیل ماتریس تصمیم می‌باشد. ماتریس تصمیم به ماتریس ارزیابی m گزینه براساس n معیار گفته می‌شود. در این ماتریس به هر گزینه براساس تک تک معیارها امتیازی داده می‌شود.

اگر از دیدگاه چند کارشناس استفاده شود باید میانگین خاکستری دیدگاه خبرگان محاسبه شود:

$$G_{ij} = \frac{1}{K}\left[G_{ij}^{1} + G_{ij}^{2} + \cdots + G_{ij}^{k}\right]$$

که در این معادله G_{ij}^{k} عدد خاکستری متناظر با دیدگاه خبره kام پیرامون میزان اهمیت گزینه i براساس شاخص j می‌باشد. بنابراین K تعداد خبرگان می‌باشد.

گام بعدی بی‌مقیاس سازی ماتریس تصمیم است. ماتریس بی‌مقیاس شده را با N و هر درایه آن را با G_{ij}^{*} نشان می‌دهند.

برای شاخص‌های از نوع سودمندی G_{ij}^{*} به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$G_{ij}^{*} = \left[\frac{L_{ij}}{G_j^{max}}, \frac{U_{ij}}{G_j^{max}}\right]$$

$$G_j^{max} = max\{U_{ij}\}$$

برای شاخص‌های از نوع زیان، G_{ij}^{*} به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$G_{ij}^{*} = [\frac{G_j^{min}}{U_{ij}}, \frac{G_j^{min}}{L_{ij}}]$$

$$G_j^{min} = \min_{1 \le i \le m} \{L_{ij}\}$$

با نرمال‌سازی ماتریس تصمیم اطمینان حاصل می‌شود که هر عدد خاکستری به بازه [0,1] تعلق دارد.

در گام سوم باید ماتریس بی‌مقیاس (N) به ماتریس بی‌مقیاس موزون (V) تبدیل شود. برای بدست آوردن ماتریس بی‌مقیاس موزون باید اوزان شاخص‌ها را داشته باشیم. اگر W_j وزن شاخص jام باشد در این صورت عناصر ماتریس بی‌مقیاس موزون با روش زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{V}_{ij} = G_{ij}^{*} \times W_j$$

در گام چهارم ایده‌آل‌های مرجع محاسبه می‌شود. اگر مجموعه راه‌کارهای ممکن را با $A = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ نمایش دهیم مجموعه مرجع و ایده‌آل A^{max} را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$A^{max} = \left\{\left[max\underline{V_{i1}},\ max\overline{V_{i1}}\right], \left[max\underline{V_{i2}},\ max\overline{V_{i2}}\right], \dots, \left[max\underline{V_{in}},\ max\overline{V_{in}}\right]\right\}$$

عنصر اصلی تصمیم‌گیری درجه امکان‌پذیری خاکستری است. زمانیکه دو عدد خاکستری G_1 و G_2 مقایسه می‌شوند، میزان احتمال اینکه $G_1 \le G_2$ به صورت زیر است:

$$P(G_1 \le G_2) = \frac{\max[0, L^{*} - \max[0, U_1 - L_2]]}{L^{*}}$$

$$L^{*} = L(G_1) + L(G_2)$$

بنابراین چهار حالت وجود خواهد داشت:

$$if\ L_1 = L_2\ \&\ U_1 = U_2\ \rightarrow G_1 = G_2 \rightarrow P(G_1 \le G_2) = 0.5$$

$$if\ U_1 < L_2\ \rightarrow G_1 < G_2 \rightarrow P(G_1 \le G_2) = 1$$

$$if\ L_1 > U_2\ \rightarrow G_1 > G_2 \rightarrow P(G_1 \le G_2) = 0$$

اگر بین دو عدد خاکستری تداخل وجود داشته باشد:

$$P(G_1 \le G_2) > 0.5 \rightarrow G_1 < G_2\ ;\ P(G_1 \le G_2) < 0.5 \rightarrow G_1 < G_2$$

دقت کنید منظور از $L(G_i)$ طول یا بازه پشتیبان عدد خاکستری است که در بحث عملیات جبری آمده است.

در نهایت راهکار ایده‌آل با فرمول زیر محاسبه خواهد شد:

$$\mathrm{P}\{A_i \le A^{max}\} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P\{V_{ij} \le A_j^{max}\}$$

هرچه میزان $\mathrm{P}\{A_i \le A^{max}\}$ کوچکتر باشد گزینه A_i رتبه بهتری خواهد داشت. به این ترتیب می‌توان گزینه‌ها رتبه‌بندی باشد و بهترین گزینه را انتخاب کرد.

مثال کاربردی : فرض کنید بخواهیم سه گزینه مدیریت شرکت را براساس ۵ معیار از دیدگاه اعضای هیات مدیره ارزیابی کنیم. اعضای هیات مدیره ۵ نفر هستند. میزان اهمیت هر معیار از دیدگاه هیات مدیره در جدول ۱۲ ارائه شده است.

جدول ۱۲ – میزان اهمیت هر معیار از دیدگاه خبرگان

ماتریس تصمیم	C1	C2	C3	C4	C5
خبره ۱	نسبتا مهم	خیلی مهم	مهم	متوسط	نسبتاً بی‌اهمیت
خبره ۲	بی‌اهمیت	بی‌اهمیت	خیلی بی‌اهمیت	بی‌اهمیت	بی‌اهمیت
خبره ۳	خیلی مهم	مهم	خیلی مهم	خیلی مهم	نسبتا مهم
خبره ۴	خیلی بی‌اهمیت	خیلی بی‌اهمیت	خیلی بی‌اهمیت	بی‌اهمیت	خیلی بی‌اهمیت
خبره ۵	نسبتاً بی‌اهمیت	نسبتاً بی‌اهمیت	متوسط	نسبتاً بی‌اهمیت	نسبتا مهم

با توجه به جدول ۱۱ دیدگاه خبرگان به صورت خاکستری در جدول ۱۳ ارائه شده است:

جدول ۱۳ – میزان اهمیت هر معیار از دیدگاه خبرگان

C1	C2	C3	C4	C5
[0.5,0.6]	[0.9,1]	[0.6,0.9]	[0.4,0.5]	[0.3,0.4]
[0.1,0.3]	[0.1,0.3]	[0,0.1]	[0.1,0.3]	[0.1,0.3]
[0.9,1]	[0.6,0.9]	[0.9,1]	[0.9,1]	[0.5,0.6]
[0,0.1]	[0,0.1]	[0,0.1]	[0.1,0.3]	[0,0.1]
[0.3,0.4]	[0.3,0.4]	[0.1,0.3]	[0.3,0.4]	[0.1,0.3]

برای تعیین وزن هر معیار کافی است تا میانگین خاکستری اوزان هر معیار (هر ستون) محاسبه شود. میانگین کران‌های بالا و کران‌های پایین هر ستون محاسبه کنید. در این صورت خواهیم داشت:

جدول ۱۴ – وزن خاکستری هر معیار

C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**
[0.36,0.48]	[0.38,0.54]	[0.32,0.48]	[0.36,0.5]	[0.2,0.34]

برای تعیین اولویت نهائی گزینه‌ها با تکنیک تحلیل رابطه خاکستری، ماتریس تصمیم G_{3*5} در جدول ۱۵ ارائه شده است.

جدول ۱۵ - ماتریس تصمیم خاکستری

G	C1	C2	C3	C4	C5
A1	[2,3.2]	[5.2,6.8]	[1.4,2.6]	[4.4,5.4]	[4.8,6.6]
A2	[4.8,6]	[5.6,6.6]	[4,5]	[5.6,7]	[2.2,3.6]
A3	[3.2,4.8]	[2.6,4.4]	[4,5.4]	[4.4,6]	[2.6,4.6]

با نرمالیز کردن ماتریس تصمیم، عددهای خاکستری در فاصله [۱و۰] قرار خواهند گرفت. در این مطالعه همه معیارها از نوع سودمندی است. ماتریس حاصل از بی‌مقیاس سازی ماتریس تصمیم در جدول ۱۶ ارائه شده است.

جدول ۱۶- ماتریس تصمیم خاکستری نرمال

N	C1	C2	C3	C4	C5
A1	[0.33,0.53]	[0.76,1]	[0.26,0.48]	[0.63,0.77]	[0.73,1]
A2	[0.8,1]	[0.82,0.97]	[0.74,0.93]	[0.8,1]	[0.33,0.55]
A3	[0.53,0.8]	[0.38,0.65]	[0.74,1]	[0.63,0.86]	[0.39,0.7]

در گام سوم وزن هر یک از معیارها در ستون مربوط به آن معیار ضرب می‌شود تا ماتریس نرمالیز موزون حاصل شود. این عمل باعث می‌شود تا هنگام مرتب سازی درجه رابطه خاکستری مربوط به گزینه‌های مختلف از مرتب سازی اعداد خاکستری اجتناب شود. این اوزان در گام نخست محاسبه شده است.

W_j = { [0.36,0.48]; [0.38,0.54]; [0.32,0.48]; [0.36,0.5]; [0.2,0.34]}

ماتریس تصمیم بی‌مقیاس موزون در جدول ۱۷ ارائه شده است.

جدول ۱۷- ماتریس تصمیم خاکستری نرمال موزون

V	C1	C2	C3	C4	C5
A1	[0.12,0.256]	[0.291,0.54]	[0.083,0.231]	[0.226,0.386]	[0.145,0.34]
A2	[0.288,0.48]	[0.313,0.524]	[0.237,0.444]	[0.288,0.5]	[0.067,0.185]
A3	[0.192,0.384]	[0.145,0.349]	[0.237,0.48]	[0.226,0.429]	[0.079,0.237]

پس از ایجاد روابط خاکستری، تمامی ارزش های عملکردی مانند زمانی‌که از مفهوم نرمال کردن استفاده می‌شود، بین صفر و یک قرار خواهند گرفت. هر چه x_{ij} به یک نزدیکتر باشد از مطلوبیت بیشتری برخوردار خواهد بود. براساس یک استدلال می‌توان گفت سری مقایسه‌ای که تمام گزینه‌های آن برابر ۱ باشد بهترین انتخاب خواهد بود. بنابراین سری هدف مرجع یک سری است که تمامی ارزش‌های عملکردی آن برابر ۱ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_o = (x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on}) = \{[1,1], [1,1], \dots, [1,1]\}$$

با عنایت به روابطی که پیشتر بیان شد، سری هدف مرجع به صورت زیر است:

$$A^{max} = \{[0.291\ , 0.540], [0.313\ , 0.524], \dots, [0.237\ , 0.480]\}$$

در نهایت درجه امکان‌پذیری خاکستری میان هر گزینه با راهکار ایده‌آل محاسبه شده است. هرچه میزان $P\{A_i \leq A^{max}\}$ کوچکتر باشد گزینه A_i رتبه بهتری خواهد داشت. به این تریتب می‌توان گزینه‌ها رتبه‌بندی باشد و بهترین گزینه را انتخاب کرد. خلاصه نتایج رتبه‌بندی گزینه‌ها در شکل ۱ ارائه شده است. بنابراین گزینه شماره ۲ با درجه امکان‌پذیری ۰/۶۶۷ در اولویت نخست قرار دارد.

فهرست منابع

Chang, T.C., Lin, S.J., 1999. Grey relation analysis of carbon dioxide emissions from industrial production and energy uses in Taiwan. Journal of Environmental Management 56 (1999), 247–257.

Deng, J.L., 1982. Control problems of grey system. Systems and Control Letters 1, 288–294.

Deng, J.L., 1988. Properties of relational space for grey systems In Essential Topics on Grey System-Theory and Applications. China Ocean 1–13.

Deng, J.L., 2001. Synthesizing Kenning model and Grey Hazy Set. Journal of Grey System 13 (3), 254.

Fontela, E., & Gabus, A. (1976). The DEMATEL observer, DEMATEL 1976 report. Switzerland Geneva: Battelle Geneva Research Center.

Habibi, A., Jahantigh, F. F., & Sarafrazi, A. (2015). Fuzzy Delphi technique for forecasting and screening items. Asian Journal of Research in Business Economics and Management, 5(2), 130-143.

Habibi, A., Sarafrazi, A., & Izadyar, S. (2014). Delphi technique theoretical framework in qualitative research. The International Journal of Engineering and Science, 3(4), 8-13.

Hamzaçebi, Coskun., Mehmet Pekkaya, Determining of stock investments with grey relational analysis, Expert Systems with Applications 38 (2011) 9186–9195.

Li, Guo-Dong., Daisuke Yamaguchia, Masatake Nagaib, A grey-based decision-making approach to the supplier selection problem, Mathematical and Computer Modelling 46 (2007) 573–581.

Lin, Sue.,I.J. Lub., Charles, Lewis, Grey relation performance correlations among economics, energy use and carbon dioxide emission in Taiwan, Energy Policy 35 (2007) 1948–1955

Narver, J. C., & Slater, S. F. (1990). The effect of a market orientation on business profitability. Journal of marketing, 54(4), 20-35.

Saaty, T.L; 1983. The analytic hierarchy process. NewYork: McGraw- Hill.

Shi, J.R., Liu, S.Y., Xiong, W.T.(2005). A new solution for interval number linear programming, Journal of Systems Engineering Theory and Practice, 2: 101–106.